

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. Pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC considerăm punctele D, E, F , în această ordine, astfel încât $\overline{BD} = 2\overline{DE}$ și $\overline{CF} = 2\overline{FE}$. Dacă $M \in AB$ și $N \in AC$ sunt astfel încât $AE \cap MD \cap NF = \{O\}$, arătați că dreptele MN și BC sunt paralele.

Sergiu Prisacariu

Soluție.

Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABE$ cu punctele coliniare O, D și M ,

obținem că $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DE} \cdot \frac{OE}{OA} = 1$ 2p

Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ACE$ cu punctele coliniare O, F și N ,

rezultă că $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{OE}{OA} = 1$ 2p

Folosind ipotezele $\overline{BD} = 2\overline{DE}$ și $\overline{CF} = 2\overline{FE}$, deducem că $\frac{BD}{DE} = \frac{CF}{FE}$ 1p

Din cele trei egalități obținem $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ 1p

Aplicând reciproca teoremei lui Thales, urmează că $MN \parallel BC$ 1p

2. Fie punctele coliniare A, B, C, D astfel încât $AB = BC = CD$. Un mobil parcurge distanțele AB, BC, CD cu vitezele constante v_1, v_2 , respectiv v_3 , diferite între ele. Un al doilea mobil parcurge distanța AD cu viteza constantă v , care este media aritmetică a vitezelor v_1, v_2 și v_3 . Arătați că timpul necesar parcurgerii segmentului AD este mai mare pentru primul mobil decât pentru cel de-al doilea.

Sergiu Prisacariu

Soluție.

Notând $AB = BC = CD = a$, se obține $t_1 = \frac{a}{v_1}$, $t_2 = \frac{a}{v_2}$, $t_3 = \frac{a}{v_3}$, deci timpul în care primul mobil

parcurge AD este $T_1 = t_1 + t_2 + t_3 = a \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \right)$ 2p

Timpul necesar celui de-al doilea mobil este $T_2 = \frac{9a}{v_1 + v_2 + v_3}$ 2p

Avem de arătat că: $a \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \right) > \frac{9a}{v_1 + v_2 + v_3}$ 1p

adică $\frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} > \frac{3}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}$, ceea ce rezultă din faptul că media aritmetică este mai mare

decât media armonică, inegalitatea fiind strictă întrucât numerele v_1, v_2 și v_3 sunt distincte.....2p

3. Determinați funcția $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ pentru care $f(2) = 3$ și care verifică relația:

$$\frac{1}{f(1) \cdot f(2)} + \frac{1}{f(2) \cdot f(3)} + \dots + \frac{1}{f(n) \cdot f(n+1)} = \frac{n}{f(n+1)}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^* .$$

Gazeta Matematică (Supliment)

Soluție.

Pentru $n = 1$ se obține că $f(1) = 1$ 1p

Dând în continuare valori lui n , intuim că $f(n) = 2n - 1$ 2p

Presupunerea precedentă se demonstrează prin inducție.....4p

4. Triunghiul ABC este înscris în cercul de centru O, are ortocentrul H și centrul de greutate G. Fie A', B', C' punctele diametral opuse punctelor A, B, C în cercul circumscris triunghiului. Dacă $\Delta A'B'C'$ are ortocentrul H' și centrul de greutate G' , arătați că punctul O este mijloc și pentru segmentul $[HH']$ și pentru segmentul $[GG']$.

Soluție.

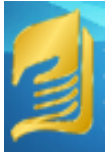
$\vec{OA} + \vec{OA'} = \vec{0}, \vec{OB} + \vec{OB'} = \vec{0}, \vec{OC} + \vec{OC'} = \vec{0}$ 2p

Avem că $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ și $\vec{OH'} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'}$ 2p

Adunând relațiile, obținem $\vec{OH} + \vec{OH'} = \vec{0}$, adică O este mijlocul segmentului $[HH']$1p

Dar $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ și $\vec{OH'} = 3\vec{OG'}$,1p

de unde $\vec{OG} + \vec{OG'} = \vec{0}$, adică O este mijlocul segmentului GG'1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

1. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f(x)) = 2f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Aflați punctele de pe graficul funcției care au abscisa egală cu ordonata.
- Determinați funcțiile bijectivă cu proprietatea dată.

Iulia Cecon

Soluție.

- Fie $A(a, a) \in G_f$; atunci $f(a) = a$ 2p
 $f(f(a)) = f(a) = a$ 1p
 Înlocuind în relația din enunț, obținem $a = 2a + 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow A(-1, -1)$ este singurul punct care are coordonatele egale și este situat pe graficul funcției f 1p
- Trecem $x \mapsto f^{-1}(x)$ (f^{-1} există, funcția f fiind bijectivă) 1p
 $f(x) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ 2p

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numerele reale $a, b, x_1, x_2, \dots, x_n$ din intervalul $(0, 1)$, astfel încât:

$$b^n \leq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n. \text{ Demonstrați că } (\log_a b)^n \geq \log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \dots \cdot \log_a x_n.$$

Cristian Moanță, Gazeta Matematică

Soluție.

Inegalitatea de demonstrat revine la $\sqrt[n]{\log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \dots \cdot \log_a x_n} \leq \log_a b$ 1p

Din inegalitatea mediilor, $\sqrt[n]{\log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \dots \cdot \log_a x_n} \leq \frac{1}{n}(\log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n) =$

$$= \frac{1}{n} \log_a x_1 x_2 \dots x_n \text{ 4p}$$

Cum funcția $x \mapsto \log_a x$ este strict descrescătoare, $\log_a x_1 x_2 \dots x_n \leq n \log_a b$ și, de aici,

cerința problemei 2p

3. a) Dacă $z \in \mathbb{C}$, demonstrați că $z^2 + \bar{z}^2 \leq 2|z|^2$.

b) Fie a, b, c, d patru numere complexe astfel încât:

$$a^2 + \bar{b}^2 = 2|c|^2, b^2 + \bar{c}^2 = 2|d|^2, c^2 + \bar{d}^2 = 2|a|^2 \text{ și } d^2 + \bar{a}^2 = 2|b|^2.$$

Demonstrați că există $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{-1, 1\}$ pentru care $\varepsilon_1 \cdot a + \varepsilon_2 \cdot b + \varepsilon_3 \cdot c + \varepsilon_4 \cdot d = 0$.

Florin Stănescu

Soluție.

- a) Dacă $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$, atunci $z^2 + \bar{z}^2 = 2x^2 - 2y^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2|z|^2$ 2p
Egalitatea se atinge pentru $y = 0$, deci când $z \in \mathbb{R}$ 1p
b) Adunând membru cu membru cele patru relații și ținând seama de punctul a), obținem că $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Astfel, relațiile din enunț devin $a^2 + b^2 = 2c^2, b^2 + c^2 = 2d^2, c^2 + d^2 = 2a^2, d^2 + a^2 = 2b^2$ 2p
Înlocuind succesiv, obținem că $a^2 = b^2 = c^2 = d^2$, deci $|a| = |b| = |c| = |d|$ și, de aici, urmează concluzia 2p

4. Pe tastatura unui telefon celular, cifrele 1, 2, ..., 9 sunt aranjate în cele nouă căsuțe ale unui pătrat 3×3 . Plecând de la o cifră oarecare de pe tastatură, Lucian-Georges formează numere de cinci cifre nenule, astfel încât căsuța fiecărei cifre a numărului (începând cu cea de-a doua) să aibă un singur vârf în comun cu căsuța cifrei precedente a numărului; el poate reveni de mai multe ori la aceeași cifră.

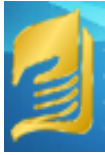
1	2	3
4	5	6
7	8	9

- a) Câte numere care să conțină atât cifre pare, cât și cifre impare, se pot forma?
b) Câte numere care conțin numai cifre pare se pot forma?
c) Câte numere care conțin numai cifre impare se pot forma?

Gabriel Popa

Soluție.

- a) Căsuțele care conțin cifre pare și cele care conțin cifre impare au laturi întregi comune, deci nu se pot forma astfel de numere 2p
b) $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ de numere 2p
c) Avem $1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 16$ numere care încep cu 5 și $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 = 64$ numere care încep cu 1, 3, 7 sau 9, în total 80 de numere 3p



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

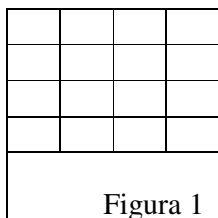
1. Dacă $n \in \mathbb{N}$, calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1^x + 2^x + \dots + n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$.

Gazeta Matematică (Supliment)

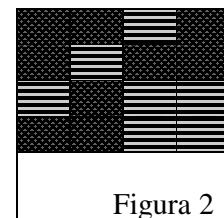
Soluție.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1^x + 2^x + \dots + n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1^x + 2^x + \dots + n^x - n}{n} \right)^{\frac{n}{1^x + 2^x + \dots + n^x - n}} \right]^{\frac{1^x + 2^x + \dots + n^x - n}{nx}} = \dots \dots \dots 3p \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} + \dots + \frac{n^x - 1}{x} \right) \frac{1}{n}} = \dots \dots \dots 2p \\ &= e^{(\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n) \frac{1}{n}} = \dots \dots \dots 1p \\ &= e^{\frac{1}{n} \ln n!} = e^{\ln \sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{n!} \dots \dots \dots 1p \end{aligned}$$

2. Cătălin, membru în Armata Ultra, dorește să ofere fiecărui suporter al echipei Steaua prezent la un meci desfășurat pe Arena Națională (care are 60000 locuri și este, desigur, plină) câte un banner matriceal având forma din figura 1. Cătălin intenționează să coloreze fiecare dintre cele 16 pătrățele din matrice fie cu roșu, fie cu albastru.



- a) Poate să ofere Cătălin fiecărui suporter din stadion câte un banner colorat în mod diferit?
- b) Care este numărul maxim de bannere distincte care pot fi colorate simetric în raport cu diagonala principală? (un exemplu de banner simetric în raport cu diagonala principală este prezentat în figura nr. 2).



Soluție.

a) Numărul total de bannere distincte este $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{16 \text{ de } 2} = 2^{16} = 65536 > 60000$.

Cătălin poate oferi fiecărui suporter câte un banner distinct 4p

b) Pot fi colorate $2^{10} = 1024$ bannere distincte, simetric față de diagonala principală 3p

3. a) Găsiți o matrice $A \in M(\mathbb{Z})$ astfel încât, dacă împărțim numărul $\det A$ la 4, obținem restul 1.

b) Indicați o matrice $B \in M_3(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că $\det B$ se divide cu 4.

c) Fie $T = \begin{pmatrix} 2011 & 2013 & 2015 \\ 2013 & 2009 & 2013 \\ 2017 & 2013 & 2019 \end{pmatrix}$. Aflați restul împărțirii prin 4 a numărului $\det T$.

Soluție.

a) Alegem, de exemplu, $A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $\det A = 1 = 4 \cdot 0 + 1$ 2p

b) Putem considera $B = O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $\det B = 0 = 4 \cdot 0 + 0$ 2p

c) $\det T = \begin{vmatrix} 2011 & 2013 & 2015 \\ 2013 & 2009 & 2013 \\ 2017 & 2013 & 2019 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_4 - 1 & M_4 + 1 & M_4 - 1 \\ M_4 + 1 & M_4 + 1 & M_4 + 1 \\ M_4 + 1 & M_4 + 1 & M_4 - 1 \end{vmatrix} = M_4$, deci restul împărțirii la 4 a lui $\det T$ este egal cu 0 3p

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că funcția f este strict crescătoare dacă și numai dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

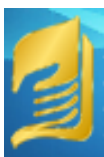
Arpad Benyi, Revista de Matematică din Timișoara

Soluție.

O funcție aditivă are proprietatea că $f(0) = 0$, iar $f(nx) = nf(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ 2p

Dacă f este strict crescătoare, atunci $f(1) > f(0) = 0$, iar $f(x) \geq f([x]) = [x] \cdot f(1)$, deci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} [x] \cdot f(1) = +\infty$ 3p

Reciproc, fie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ și $x < y$. Atunci $f(n(y-x)) = f(ny - nx) = nf(y) - nf(x) = n(f(y) - f(x))$. Astfel, $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(y) - f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n(y-x)) = +\infty$, prin urmare $f(y) - f(x) > 0$, adică $f(x) < f(y)$ 2p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. Pe mulțimea $M = \{\text{Poli Iași, Steaua, Oțelul, Rapid, UTA}\}$ definim legea de compoziție $*$ astfel:

*	Poli Iași	Steaua	Oțelul	Rapid	UTA
Poli Iași	Poli Iași	Steaua	Steaua	Steaua	Poli Iași
Steaua	Steaua	Steaua	Steaua	Steaua	Steaua
Oțelul	Poli Iași	Steaua	Poli Iași	Poli Iași	Oțelul
Rapid	Oțelul	Steaua	Oțelul	Poli Iași	Rapid
UTA	Poli Iași	Steaua	Oțelul	Rapid	UTA

- Precizați dacă legea $*$ admite element neutru și în caz că există, identificați-l.
- Spunem că elementul $d \in M$ este *element destroyer* dacă $d*x = x*d = d, \forall x \in M$.
Admite legea de compoziție descrisă mai sus element destroyer?
- Pe mulțimea M dată mai sus, câte legi de compoziție se pot defini (numărând-o și pe cea deja definită)? Câte dintre acestea sunt comutative?

Soluție.

- Se observă că $UTA * x = x * UTA = x, \forall x \in M$, deci UTA este elementul neutru 2p
- $Steaua * x = x * Steaua = Steaua, \forall x \in M$, așadar Steaua este elementul destroyer 2p
- Există 5^{25} legi de compoziție posibile pe M 2p
Dintre acestea, 5^{15} sunt comutative 1p

2. Pe mulțimea numerelor întregi \mathbb{Z} , considerăm legea de compoziție $*$ definită prin:

$$x * y = 5xy + 5x + 5y + 4, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

- Justificați asociativitatea legii $*$.
- Cercetați existența elementului neutru.
- Calculați ultimele 2000 cifre ale numărului $1*2*3*4* \dots * 2012*2013$.

Soluție.

- Justificarea corectă a asociativității
(de exemplu $(x*y)*z = x*(y*z) = 5^2(x+1)(y+1)(z+1) - 1; \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$) 3p
- Nu există element neutru pentru legea $*$ pe \mathbb{Z} 2p
- Inductiv, $x_1 * x_2 * \dots * x_n = 5^{n-1}(x_1+1)(x_2+1) \dots (x_n+1) - 1, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ 1p

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2012 \cdot 2013 = 5^{2012} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2013 \cdot 2014 - 1$ și se observă că numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013$ are pe ultimele 2000 poziții cifrele $\underbrace{999\dots9}_{2000 \text{ de } 9}$ 1p

3. Determinați primitivele funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^{2013} + x^{1006}}{(x^{1007} + 2)^{2013}}$.

Cătălin Cristea, Recreații Matematice 1/2013

Soluție.

$$f(x) = \frac{x^{1006}(x^{1007} + 2) - x^{1006}}{(x^{1007} + 2)^{2013}} = \frac{x^{1006}}{(x^{1007} + 2)^{2012}} - \frac{x^{1006}}{(x^{1007} + 2)^{2013}} \dots\dots\dots 2p$$

$$\int \frac{x^{1006}}{(x^{1007} + 2)^n} dx = \frac{1}{1007} \int \frac{(x^{1007} + 2)'}{(x^{1007} + 2)^n} dx = -\frac{1}{1007 \cdot (n-1)} \cdot \frac{1}{(x^{1007} + 2)^{n-1}} + C \dots\dots\dots 3p$$

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{1007 \cdot 2011} \cdot \frac{1}{(x^{1007} + 2)^{2011}} + \frac{1}{1007 \cdot 2012} \cdot \frac{1}{(x^{1007} + 2)^{2012}} + C \dots\dots\dots 2p$$

4. Fie $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și F o primitivă a sa cu $F(1) = 0$. Arătați că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $(c + 1)F(c) + cf(c) = 0$.

Carmen Botea și Viorel Botea, Gazeta Matematică (Supliment)

Soluție.

Concluzia revine la faptul că există $c \in (0, 1)$ pentru care $\left(xF(x) + [xF(x)]' \right) \Big|_{x=c} = 0 \dots\dots\dots 2p$

adică $\left[xe^x F(x) \right]' \Big|_{x=c} = 0 \dots\dots\dots 2p$

Funcția $G(x) = x \cdot e^x \cdot F(x), x \in [0, 1]$, verifică ipotezele teoremei lui Rolle, de unde cerința problemei .
..... 3p